

Erweiterte Analyse der Viviani-Kurve

Numerik und Differentialgeometrie

8. März 2026

1 Das Elliptische Integral zweiter Art

Die Bogenlänge der Viviani-Kurve führt auf das vollständige elliptische Integral zweiter Art $E(k)$. Die mathematische Definition lautet:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (1)$$

Für unsere Kurve setzen wir den Parameter $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein.

2 Numerische Berechnung in C

Um den Wert $s \approx 15,28079116$ zu verifizieren, kann ein C-Programm verwendet werden, das das Integral numerisch (z. B. nach der Trapezregel oder Simpson-Regel) berechnet.

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <math.h>
3
4 double function(double theta, double k) {
5     return sqrt(1.0 - pow(k, 2) * pow(sin(theta), 2));
6 }
7
8 int main() {
9     double k = 1.0 / sqrt(2.0);
10    int n = 1000000; // Anzahl der Schritte
11    double a = 0.0, b = M_PI_2;
12    double h = (b - a) / n;
13    double integral = 0.5 * (function(a, k) + function(b, k));
14
15    for (int i = 1; i < n; i++) {
16        integral += function(a + i * h, k);
17    }
18
19    double E = integral * h;
20    double s = 8.0 * sqrt(2.0) * E;
21
22    printf("E(k) = %.10f\n", E);
23    printf("Bogenlaenge s = %.10f\n", s);
24    return 0;
```

Listing 1: C-Programm zur Berechnung des elliptischen Integrals

3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Durch die Kombination aus analytischer Formel und numerischer Approximation erhalten wir:

- **Exakter Ausdruck:** $s = 8\sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- **Numerischer Wert:** $s \approx 15,28079116$