

Vollständige Analyse der Viviani-Kurve

Mathematische Kurvendiskussion

8. März 2026

1 Definition der Kurve

Die Viviani-Kurve ist durch die folgende Parameterdarstellung definiert:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 4\pi] \quad (1)$$

2 Das begleitende Dreibein (Frenet-Rahmen)

Für den Punkt $t = 0$ ergeben sich die folgenden Basisvektoren:

- **Tangenteneinheitsvektor:** $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **Hauptnormalenvektor:** $\mathbf{N}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Binormalenvektor:** $\mathbf{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 Krümmung und Torsion

Die lokalen Maße der Kurve beschreiben ihre Abweichung von einer Geraden bzw. einer Ebene.

3.1 Krümmung κ

Die Krümmung im Punkt $t = 0$ beträgt:

$$\kappa(0) = 0,5 \quad (2)$$

3.2 Torsion τ

Die Torsion (Windung) im Punkt $t = 0$ berechnet sich zu:

$$\tau(0) = 0,375 \quad (3)$$

4 Bogenlänge s

Die Gesamtlänge der Kurve im Intervall $[0, 4\pi]$ wurde über ein elliptisches Integral zweiter Gattung präzise bestimmt:

$$s = 8\sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 15,28079116 \quad (4)$$

5 Geometrische Einordnung

Die Kurve entsteht durch den Schnitt einer Kugel mit einem Zylinder. Sie ist eine räumliche Kurve, die aufgrund ihrer Torsion $\tau \neq 0$ nicht in einer Ebene liegt.